المعادلات التفاضلية ذات المتحولات المنفصلة :

الشكل العام لها هو $p(x)\,dx + q(y)\,dy = 0$

حيث امثال dx تابع فقط لـ x وامثال dy تابع فقط لـ y

لحل هذه المعادلة نكامل الطرفين فنجد

$$\int p(x)\,dx + \int q(y)\,dy = c$$

وهو الحل العام

انواع المعادلات ذات المتحولات المنفصلة

النوع الاول :

المعادلة التفاضلية التي تأخذ الشكل التالي

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

ومنه

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

بالمكاملة

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c$$

مثال (5)

حل المعادلة $y' = x \cdot y$ ذات متحولات منفصلة واوجد حلها العام

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx$$

وهي ذات متحولات منفصلة

بالمكاملة نجد

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}x^2 + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln y - \ln c = \frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{c} = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y = c\,e^{\frac{1}{2}x^2}$$

وهو الحل العام

النوع الثاني:
المعادلات التفاضلية التي تأخذ الشكل: $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$

نقسم الطرفين على $P(x)N(y)$

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$$

ونكامل فنجد

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = c$$

تمرين ①

وجد الحل العام للمعادلة $x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$

الحل:

نقسم طرفي المعادلة التفاضلية على $(x^2-1)(y^2-1)$

فنحصل على المعادلة التفاضلية ذات المتحولات المنفصلة $\frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0$

نضرب طرفي المعادلة التفاضلية بـ ②

$$\frac{2x}{x^2-1}dx + \frac{2y}{y^2-1}dy = 0$$

ونكامل فنجد

$$\ln(x^2-1) + \ln(y^2-1) = \ln c$$

$$\ln(x^2-1)(y^2-1) = \ln c$$

$$(x^2-1)(y^2-1) = c$$

تمرين ②

وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$$

الحل:

$$(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$$

$$x^2dy - yx^2dy + y^2dx + xy^2dx = 0$$

نقسم على x^2y^2

$$\frac{dy}{y^2} - \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

نكامل الطرفين فنجد :

$$-\frac{1}{y} - \ln(y) - \frac{1}{x} + \ln x = \ln(c)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \ln(c)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y+x}{xy} + \ln(c)$$

$$e^{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} = e^{\frac{y+x}{yx} + \ln(c)}$$

$$\frac{x}{y} = c \cdot e^{\frac{y+x}{yx}}$$

وهو الحل العام المطلوب

مرين (8)

وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية : $y\,dx - x\,dy = xy\,dx$

حل

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = dx \qquad \text{نقسم على } xy$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} - dx$$

$$\ln y = \ln x - x + \ln c \quad \text{نكامل الطرفين} \quad \Longrightarrow y = c\,x\,e^{-x}$$

المعادلات التفاضلية التي ترد إلى معادلات تفاضلية ذات متحولات منفصلة

من الشكل $y' = f(ax + by + c)$

مرين

وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = x - y$

حل

$$y' = x - y$$

نفرض $z = x - y \Leftarrow y = x - z \Leftarrow y' = 1 - z'$ نعوض بالمعادلة

$$1 - z' = z \Longrightarrow z' = 1 - z \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - z \Longrightarrow \frac{dz}{1-z} = dx$$

$$\ln(1-z) = -x + \ln c \qquad \Longrightarrow 1 - z = c\,e^{-x}$$

(و)

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(y^3+y-2)\,dx + xy\,dy - 5y\,dy = 0$$

إن هذه المعادلة ذات متحولات منفصلة لأنها تكتب بالشكل

$$(y^3+y-2)\,dx = -xy\,dy + 5y\,dy$$

ومنه

$$(y^3+y-2)\,dx = -(x-5)\,y\,dy$$

$$\frac{dx}{x-5} = \frac{-y}{y^3+y-2}\,dy \quad ☆$$

لمكاملة الطرفين نفرق الكسر الموجود في الطرف الايمن بالشكل

$$\frac{-y}{y^3+y-2} = \frac{-y}{(y-1)(y^2+y+2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{By+C}{y^2+y+2}$$

بتوحيد المقامات وحذفها وبعد اجراء المطابقة نجد

$$A = \frac{-1}{4} \qquad B = \frac{1}{4} \qquad C = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-y}{y^3+y-2} = \frac{-1}{4(y-1)} + \frac{y-2}{4(y^2+y+2)}$$

$$= \frac{-1}{4(y-1)} + \frac{1}{8}\,\frac{2y+1-5}{y^2+y+2}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(y-1)} + \frac{1}{8}\,\frac{2y+1}{y^2+y+2} - \frac{5}{8}\,\frac{1}{y^2+y+2}$$

نعوض ب ☆

$$\frac{dx}{x-5} = \left(-\frac{1}{4}\,\frac{1}{y-1} + \frac{1}{8}\,\frac{2y+1}{y^2+y+2} - \frac{5}{8}\,\frac{1}{y^2+y+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}\right)dy$$

نكامل

$$\ln|x-5| = -\frac{1}{4}\ln|y-1| + \frac{1}{8}\ln|y^2+y+2| - \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C$$

$$-\frac{5}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{y+1}{\sqrt{7}}$$ وهو الحل العام

المعادلات التفاضلية المتجانسة

المعادلات التفاضلية المتجانسة يمكننا دائما كتابتها بالشكل $y' = \frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$

ونستطيع تبسيطها بادخال دالة جديدة بالشكل $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$

$$\Rightarrow dy = x\,du + u\,dx$$

ونعوض فيها فتصبح المعادلة ذات متحولات منفصلة ويسهل حلها

مثال: (١٥)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $x y' - x e^{\frac{y}{x}} - y = 0$

الحل:

بالقسمة على x نجد

$$y' - e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow dy = \frac{y}{x}dx + e^{\frac{y}{x}}dx$$

نفرض $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow dy = x\,du + u\,dx$

نعوض بالمعادلة

$$x\,du + u\,dx = u\,dx + e^{u}dx$$

$$x\,du = e^{u}dx$$

$$\frac{dx}{x} = e^{-u}du$$

نكامل الطرفين

$$\ln x = -e^{-u} + c$$

$$\ln x = -e^{-\frac{y}{x}} + c$$

تمرين (11)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = y\cos\frac{y}{x} - x$$

الحل:

هذه المعادلة متجانسة لأنها تكتب على الشكل $f\left(\frac{y}{x}\right)$

نقسم طرفيها على x

$$\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} - 1$$

$$\cos\frac{y}{x}\,dy = \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\,dx - dx$$

نفرض

$$dy = x\,du + u\,dx \Leftarrow y = ux \Leftarrow u = \frac{y}{x}$$

نعوض:

$$\cos u\,(x\,du + u\,dx) = u\cos u\,dx - dx$$

$$x\cos u\,du + u\cos u\,dx = u\cos u\,dx - dx$$

$$x\cos u\,du = -dx$$

$$dx + x\cos u\,du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \cos u\,du = 0$$

بالمكاملة

$$\ln x + \sin u = \ln c$$

$$x\,e^{\sin u} = c$$

$$x\,e^{\sin\frac{y}{x}} = c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0$$
$$a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0 \quad ②$$

وبحل جملة المعادلات ② نجد احداثيات M

ثم نجري التحويل

$$dx = dX \Leftarrow x = X + \alpha$$
$$dy = dY \Leftarrow y = Y + \beta$$

فنبدل في المعادلة ①

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right)$$

ونوجد الحل العام

ثم نعوض X بـ $x - \alpha$ و Y بـ $y - \beta$ في معادلة الحل العام

تمرين (12)

وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{y - x}{2y - x + 1} \quad ①$$

الحل

$$D_1 : y - x = 0$$
$$D_2 : 2y - x + 1 = 0$$

المستقيمان متقاطعان لأن $D_1 \nparallel D_2$ ومنه نفرض $M(\alpha, \beta)$ نقطة التقاطع ونوجدها

$$\left.\begin{array}{l} \beta - \alpha = 0 \\ 2\beta - \alpha + 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = \beta = -1$$

نجري التحويل

$$dx = dX \Leftarrow x = X - 1$$
$$dy = dY \Leftarrow y = Y - 1$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية ① فنجد

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1-x+1}{2y-2-x+1+1} = \frac{y-x}{2y-x}$$

نقسم على x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{2y}{x}-1} \Rightarrow dy = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{2y}{x}-1}\,dx \quad ②$$

نفرض $z = \frac{y}{x} \Leftarrow$

$$dy = z\,dx + x\,dz \Leftarrow y = zx$$

نعوض بـ ②

$$z\,dx + x\,dz = \frac{z-1}{2z-1}\,dx$$

$$\left(\frac{z-1}{2z-1} - z\right)dx = x\,dz$$

$$\frac{z-1-2z^2+z}{2z-1}\,dx = x\,dz$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2z-1}{-2z^2+2z-1}$$

نضرب طرفي المعادلة التفاضلية بـ -2

$$-2\frac{dx}{x} = \frac{+4z-2}{2z^2-2z+1}$$

بالمكاملة

$$-2\ln x = \ln(2z^2-2z+1) + \ln c$$

$$\frac{1}{x^2} = c(2z^2-2z+1) \Rightarrow \frac{1}{x^2} = c\left(2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = c\left[2\left(\frac{y+1}{x+1}\right)^2 - 2\left(\frac{y+1}{x+1}\right) + 1\right]$$

تمرين (13)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{2x + 2y + 1}{x + y + 3}$$

الحل

$D_1 : 2x + 2y + 1 = 0$

$D_2 : x + y + 3 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

المستقيمان متوازيان

$$y' = \frac{2(x + y) + 1}{x + y + 3}$$

لنفرض $z = x + y \Rightarrow y = z - x \Rightarrow dy = dz - dx$

نعوض

$$dy = \frac{2(x + y) + 1}{x + y + 3} dx$$

$$dz - dx = \frac{2z + 1}{z + 3} dx \Rightarrow dx + \frac{2z + 1}{z + 3} dx = dz$$

$$\frac{3z + 4}{z + 3} dx = dz \Rightarrow dx = \frac{z + 3}{3z + 4} dz$$

$$dx = \frac{1}{3} \frac{3z + 4 + 5}{3z + 4} dz \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dz + \frac{5}{3} \frac{dz}{3z + 4}$$

بالمكاملة

$$x = \frac{1}{3} z + \frac{5}{9} \ln(3z + 4) + c$$

$$x = \frac{1}{3}(x + y) + \frac{5}{9} \ln(3x + 3y + 4) + c$$

وهو الحل العام

تمرين (١٤)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(2x+3y+2)\,dy = (4x+6y+4)\,dx$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x+6y+4}{2x+3y+2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow dy = 2dx \Rightarrow y = 2x + c$$

وهو الحل العام

تمرين (15)

وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(2x+y)y' = 4x+3y$$

الحل :

$$y' = \frac{4x+3y}{2x+y}$$

$c_1 = 0$ و $c_2 = 0$

بالقسمة على x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4+3\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}} \Rightarrow dy = \frac{4+3\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}}\,dx$$

وهي معادلة متجانسة

نفرض $u = \frac{y}{x} \Leftarrow y = ux \Leftarrow dy = u\,dx + x\,dy$

$$u\,dx + x\,du = \frac{4+3u}{2+u}\,dx \Rightarrow \left(u - \frac{4+3u}{2+u}\right)dx = -x\,du$$

$$\frac{2u+u^2-4-3u}{2+u}\,dx = -x\,du \Rightarrow \frac{u^2-u-4}{\frac{2u+2}{u+2}}\,dx = +x\,du$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{u+2}{2u+2}\,du \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{2u+2+2}{2u+2}\,du \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,du + \frac{1}{2}\,\frac{2\,du}{2u+2}$$

بالمكاملة

$$\ln x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\ln(2u+2) + \ln c$$

$$\ln x = \frac{1}{2}u + \ln\sqrt{2u+2} + \ln c \Rightarrow x = c\sqrt{2u+2}\,e^{\frac{1}{2}u} \Rightarrow x = c\sqrt{2\frac{y}{x}+2}\,e^{\frac{x}{2y}}$$

تمرين (12)

حل المعادلة التفاضلية

$$(2x+y-1)dy=(4x-y+7)dx$$

الحل:

$$D_1: 4x-y+7=0$$

$$D_2: 2x+y-1=0$$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وهما متقاطعان في النقطة $M(\alpha, \beta)$

$$\left.\begin{array}{l} 4\alpha-\beta+7=0 \\ 2\alpha+\beta-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=-1 \text{ , } \beta=3$$

نفرض

$$dy=dY \Leftarrow y=Y+3$$

$$dx=dX \Leftarrow x=X-1$$

نعوض بالمعادلة المعطاة

$$(2X+Y)dY=(4X-Y)dX$$

نقسم على X

$$\left(2+\frac{Y}{X}\right)dY=\left(4-\frac{Y}{X}\right)dX$$

نفرض

$$dY=u\,dX+X\,du \Leftarrow Y=uX \Leftarrow u=\frac{Y}{X}$$

نعوض

$$(2+u)(u\,dX+X\,du)=(4-u)dX$$

$$(2u+u^2-4+u)dX=-(2+u)X\,du$$

$$-\frac{dX}{X}=\frac{u+2}{u^2+3u-4}du \Rightarrow -\frac{dX}{X}=\frac{\frac{2}{5}}{u+4}du+\frac{\frac{3}{5}}{u-1}du$$

نكامل

$$-\ln X=\frac{2}{5}\ln(u+4)+\frac{3}{5}\ln(u-1)+\ln c$$

$$-5\ln X=2\ln(u+4)+3\ln(u-1)+\ln C_1$$

$$\ln\frac{1}{X^5}=\ln(u+4)^2+\ln(u-1)^3+\ln C_1 \Rightarrow \frac{1}{X^5}=C_1(u+4)^2(u-1)^3$$

$$\Leftarrow \frac{1}{X^5}=C_1\left(\frac{y}{X}+4\right)^2\left(\frac{y}{X}-1\right)^3$$

ومنه

$$(y-x-4)^3(y+4x+1)^2=C_2$$

تمرين (3)
بين أن المعادلة التالية تامة واوجد حلها العام

$$\cos y\,dx + (2y - x\sin y)\,dy = 0$$

الحل:

$$P(x,y) = \cos y \quad , \quad q(x,y) = 2y - x\sin y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = -\sin y$$

نلاحظ أن $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ فالمعادلة المعطاة تامة

لإيجاد حلها العام

$$F'_x = P = \cos y \Rightarrow F(x,y) = \int \cos y\,dx + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = x\cos y + \varphi(y) \quad \star$$

نشتق بالنسبة إلى y

$$F'_y(x,y) = -x\sin y + \varphi'(y)$$

ولدينا

$$F'_y = q = 2y - x\sin y$$

بالمقارنة نجد

$$\varphi'(y) = 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^2$$

نعوض بـ $\star$ فنجد

$$F(x,y) = x\cos y + y^2$$

ويكون الحل العام هو

$$x\cos y + y^2 = C$$

طريقة ثانية

$$\int P\,dx = \int \cos y\,dx = x\cos y + C$$

$$\int q\,dy = \int (2y - x\sin y)\,dy = y^2 + x\cos y + C$$

نأخذ اجتماع الحلول $\int P\,dx$ و $\int q\,dy$ فيكون هو الحل العام أي

$$x\cos y + y^2 = C$$

تمرين (٦)

برهن أن المعادلة $e^{2x}(x^2+y^2+x)dx + y e^{2x} dy = 0$ تامة واوجد حلها العام

حل:

$$P(x,y) = e^{2x}(x^2+y^2+x) \qquad q(x,y) = y e^{2x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y e^{2x} \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 2y e^{2x}$$

نلاحظ أن

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ فالمعادلة تامة

لايجاد حلها العام

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = P = e^{2x}(x^2+y^2+x) \Longrightarrow F(x,y) = \int e^{2x}(x^2+y^2+x)dx + \varphi(y)$$

$$= \int x^2 e^{2x} dx + y^2 \int e^{2x} dx + \int x e^{2x} dx + \varphi(y)$$

نكامل بالتجزئة (التكامل الاول والثالث)

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} + \frac{1}{2}y^2 e^{2x} + \varphi(y) \qquad ☆$$

نشتق طرفي العلاقة ☆ بالنسبة لـ y

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = y e^{2x} + \varphi'(y)$$

نقارن مع

$$\frac{\partial F}{\partial y} = q \Leftarrow$$

$$\varphi'(y) = 0 \Longrightarrow \varphi(y) = c$$

ويكون الحل العام من ☆

$$\frac{1}{2}x^2 e^{2x} + \frac{1}{2}y^2 e^{2x} + c = 0$$

$$x^2 e^{2x} + y^2 e^{2x} = c_1$$

طريقة ثانية

نكامل $\int P dx$ و $\int q dy$ ونأخذ اجتماع الحلول هو الحل العام

تمرين (5)

حل المعادلة التفاضلية بإيجاد عامل التكميل $(x^2+y^2+x)\,dx + y\,dy = 0$

الحل

$$p = x^2+y^2+x \qquad q = y$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

نلاحظ أن $\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x}$ فالمعادلة غير تامة

لإيجاد عامل التكميل

(نحن لا نعرف أن عامل التكميل تابع لـ x أو تابع لـ y)

نوجد هل عامل التكميل تابع لـ y فقط:

$$\frac{q'_x - p'_y}{p} = \frac{0-2y}{x^2+y^2+x}$$

نلاحظ أن عامل التكميل غير تابع لـ y فقط نرفضه ونحاول إيجاد عامل تكميل تابع لـ x

نوجد إذا عامل التكميل تابع لـ x فقط

$$\frac{p'_y - q'_x}{q} = \frac{2y}{y} = 2$$

ومنه عامل التكميل تابع لـ x فقط

$$\mu = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

نضرب μ بطرفي المعادلة

$$e^{2x}(x^2+y^2+x)\,dx + y\,e^{2x}\,dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية تامة سبق أن وجدنا حلها العام

تمرين (6)

حل المعادلة التفاضلية التالية بإيجاد عامل التكميل (1) $(y+xy^2)\,dx - x\,dy = 0$

الحل:

$$p = y + xy^2 \qquad q = -x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 1 + 2xy \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = -1$$

نلاحظ أن $\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x}$ فالمعادلة غير تامة

لنوجد عامل التكميل

نوجد اذا كان عامل التكميل تابع لـ x فقط

$$\frac{p'_y - q'_x}{q} = \frac{1+2xy+1}{-x}$$ نلاحظ ان عامل التكميل غير تابع له

نوجد اذا كان عامل التكميل تابع لـ y فقط

$$\frac{q'_x - p'_y}{p} = \frac{-1-1-2xy}{y+xy^2} = \frac{-2-2xy}{y+xy^2}$$

$$= \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y}$$

نلاحظ ان عامل التكميل تابع لـ y فقط

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2\ln(y)} = e^{\ln\frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة (1) بعامل التكميل $\frac{1}{y^2}$

$$\underbrace{\frac{y+xy^2}{y^2}}_{p_1} dx - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{q_1} dy = 0$$

وهي معادلة تامة لحلها

$$F'_x = p_1 = \frac{y+xy^2}{y^2} \Rightarrow F(x,y) = \int \frac{y+xy^2}{y^2} dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = \int \frac{1}{y} dx + \int x\, dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y) \quad (\star)$$

نشتقها بالنسبة لـ y

$$F'_y = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y)$$

ولدينا

$$F'_y = q_1$$

بالمقارنة نجد: $\varphi'(y) = 0 \Leftarrow \varphi(y) = c$ نعوض بـ $\star$ نجد:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + c = 0$$ وهو الحل العام

تمرين (7)

أوجد عامل تكميل المعادلة التفاضلية $(2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3)dx + (x^2+y^2)dy = 0$

علماً أنه تقبل عامل تكميل تابع لـ x فقط ثم أوجد الحل العام لها

الحل:

$$P = 2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3 \qquad q = x^2 + y^2$$

$$P'_y = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2 \qquad q'_x = \frac{\partial q}{\partial x} = 2x$$

نلاحظ أن $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x}$ فالمعادلة غير تامة

لإيجاد عامل التكميل التابع لـ x

$$\frac{P'_y - q'_x}{q} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2+y^2} = 1$$

$$\mu = e^{\int dx} = e^x$$

وهو عامل التكميل

نضرب به طرفي المعادلة المعطاة فنجد

$$\underbrace{e^x(2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3)}_{P_1}dx + \underbrace{e^x(x^2+y^2)}_{q_1}dy = 0$$

$$F'_x = P_1 = 2xye^x + x^2ye^x + \frac{1}{3}y^3e^x \Rightarrow F(x,y) = \int e^x(2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3)dx + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = 2y\int xe^x dx + y\int x^2e^x dx + \frac{1}{3}y^3\int e^x dx + \varphi(y)$$

نكامل بالتجزئة

$$F(x,y) = 2y(xe^x - e^x) + y(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) + \frac{1}{3}y^3e^x + \varphi(y) \quad (*)$$

$$F'_y = 2xe^x - 2e^x + x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + y^2e^x + \varphi'(y)$$

$$F'_y = x^2e^x + y^2e^x + \varphi'(y)$$

وعندها

$$\varphi(y) = c \Leftarrow \varphi'(y) = 0 \text{ بالمقارنة } \Leftarrow F'_y = q_1$$

نعوض بـ (*)

$$F(x,y) = 2y(xe^x - e^x) + y(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) + \frac{1}{3}y^3e^x + c$$

ويعطى الحل العام بالشكل بعد الاختصار

$$yx^2e^x + \frac{1}{3}y^3e^x = c_1$$

تمرين 8 -

اثبت أن للمعادلة التفاضلية $\left(\frac{y}{x^2} - 2x\right)dx + \frac{1}{x}dy = 0$ عامل تكميل تابع لـ x فقط واوجد الحل العام لها

الحل ،

$P = \frac{y}{x^2} - 2x$ $\qquad q = \frac{1}{x}$

$P'_y = \frac{1}{x^2}$ $\qquad q'_x = -\frac{1}{x^2}$

نلاحظ أن $P'_y \neq q'_x$ فالمعادلة غير تامة ونوجد عامل التكميل

$$\frac{P'_y - q'_x}{q} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{2}{x} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = x^2$$

وهو تابع لـ x فقط

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل

$(y - 2x^3)dx + x\,dy = 0$

$\int (y - 2x^3)dx = yx - \frac{1}{2}x^4$

$\int x\,dy = xy$

نأخذ اجتماع الحلول

$yx - \frac{1}{2}x^4 = c_1$

تمرين 9 -

اثبت أن للمعادلة التفاضلية $(x^2 + y^2 + x)dx + xy\,dy = 0$ عامل تكميل تابع لـ x فقط ثم اوجد الحل العام لها

$P = x^2 + y^2 + x$ $\qquad q = xy$

$P'_y = 2y$ $\qquad q'_x = y$

$P'_y \neq q'_x$ المعادلة غير تامة

لنوجد عامل التكميل

$$\frac{p'_y - q'_x}{q} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل

$$(x^3 + y^2 x + x^2)dx + x^2 y \, dy = 0$$

$$\int (x^3 + y^2 x + x^2) = x^4 + \frac{y^2 x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 y \, dy = \frac{x^2 y^2}{2}$$

نأخذ اجتماع الحلول

$$x^4 + \frac{y^2 x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = c$$

١- اوجد حل المعادلة التفاضلية الخطية $y' + \frac{1}{x} y = \ln x$

الحل :

نوجد عامل التكميل

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

نضرب عامل التكميل بطرفي المعادلة

$$x y' + y = x \ln x$$

$$[x y]' = x \ln x$$

$$x y = \int x \ln x \, dx$$

$$x y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$y = \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4} + \frac{c}{x}$$

٢- اوجد حل المعادلة الخطية التالية

$$y' + \frac{3}{x} y = x^4$$

حل :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

نضرب بعامل التكميل

$$x^3 y' + 3 x^2 y = x^7$$

$$[x^3 y]' = x^7$$

$$x^3 y = \int x^7 dx$$

$$x^3 y = \frac{x^8}{8} + c$$

$$y = \frac{x^5}{8} + \frac{c}{x^3}$$

٣- اوجد حل المعادلة التفاضلية الخطية التالية :

$$y' + 3y = e^{2x}$$

حل ،

$$\mu = e^{\int 3 dx} = e^{3x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل

$$e^{3x} y' + 3 e^{3x} = e^{5x} \Longrightarrow [e^{3x} y]' = e^{5x}$$

تكامل

$$e^{3x} y = \int e^{5x} dx \Longrightarrow e^{3x} y = \frac{1}{5} e^{5x} + c \Longrightarrow y = \frac{1}{5} e^{2x} + c e^{-3x}$$

ت: اوجد حل المعادلة التفاضلية الخطية:

$$y' - xy = x$$

ح:

طريقة (1)

$$\mu = e^{\int -x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

نضرب بعامل التكميل

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y' - x e^{-\frac{x^2}{2}} y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\left[e^{-\frac{x^2}{2}} y\right]' = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

نكامل

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y = \underbrace{\int x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx}_{I} \quad \star$$

نفرض في التكامل I: $t = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow dt = -x\,dx$

$$I = \int -e^{t}\,dt = -e^{t} + c = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

نعوض بـ $\star$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

$$y = -1 + c\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

طريقة (2)

نلاحظ أن هذه المعادلة التفاضلية ذات متحولات منفصلة لأنها تكتب بالشكل

$$y' = xy + x$$

$$y' = x(y+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1)$$

$$\frac{dy}{y+1} = x\,dx$$

نكامل

$$\ln(y+1) = \frac{x^2}{2} + \ln c$$

$$\ln\frac{y+1}{c} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{y+1}{c} = e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = c\,e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

5 - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية التالية : $y' + y\cot x = 2e^{\cos x}$

الحل :

$$\mu = e^{\int \cot x \, dx} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $\sin x$

$$\sin x \, y' + \cos x \, y = 2\sin x \, e^{\cos x}$$

$$[\sin x \, y]' = 2\sin x \, e^{\cos x} \Longrightarrow \sin(x)\, y = \int 2\sin x \, e^{\cos x} dx$$

$$\sin(x)\, y = -2e^{\cos x} + c$$

$$y = \frac{-2}{\sin x} e^{\cos x} + \frac{c}{\sin x}$$

ملاحظة: المثال القادم هي ذكية للمعادلات الخطية وبالأغلب لا تأتي في الامتحان ولكن كتبتها حتى اذا اتت في الامتحان تعرفوا حلها وهي سهلة ولكن أول خطوة تجعلها خطية

6 - أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'\left(y + \frac{2x}{y}\right) = 1$

الحل :

نلاحظ أن هذه المعادلة غير خطية فنكتبها بالشكل

$$\frac{dy}{dx}\left(y + \frac{2x}{y}\right) = 1$$

$$dy\left(y + \frac{2x}{y}\right) = dx$$

$$y + \frac{2x}{y} = \frac{dx}{dy}$$

$$y + \frac{2x}{y} = x'$$

$$x' - \frac{2}{y}x = y \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية حيث x هو المتحول المجهول

$$\mu = e^{\int \frac{-2}{y} dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$$

نضرب (1) بعامل التكميل

$$\frac{1}{y^2}x' - \frac{2}{y^3}x = \frac{1}{y} \Longrightarrow \left[\frac{1}{y^2}x\right]' = \frac{1}{y} \Longrightarrow \frac{1}{y^2}x = \int \frac{1}{y} dy$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y^2}x = \ln y + c \Longrightarrow x = y^2 \ln y + c y^2$$

مكانك عام | أي نوع الحدث؟

معادلة برنولي

معادلة برنولي :
هي من الشكل :

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{n}$$

نلاحظ أن y^{n} زيادة عن شكل المعادلة الخطية

عندما $n=0$ تصبح المعادلة $y' + p(x)y = q(x)$ خطية

عندما $n=1$ تصبح المعادلة $y' + [p(x) - q(x)]\,y = 0$ ذات متحولات منفصلة

عندما $n \neq 0 , 1$ الحالة العامة

نقسم طرفي المعادلة على y^{n} فتصبح بالشكل ☆

$$y^{-n} y' + p(x)\, y^{1-n} = q(x)$$

نفرض $z = y^{1-n} \Leftarrow z' = (1-n)\, y^{-n} y'$ نعوض بـ ☆

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)\, z = q(x)$$

وهي معادلة خطية نحلها عن طريق عامل التكميل

ملاحظة
نستطيع فهمها من الأمثلة التالية

1- اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2y' - \frac{1}{x} y = -y^{3}\cos(x)$

الحل :
هي معادلة برنولي نحلها نقسم الطرفين على y^{3}

$$2y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = -\cos(x)$$

نفرض $z = y^{-2} \Leftarrow z' = -2y^{-3}y'$ ونعوض

$$-z' - \frac{1}{x}z = -\cos x \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = \cos x$$

وهي معادلة خطية لايجاد حلها العام نوجد عامل التكميل

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل

$$x z' + z = x\cos x$$

$$[x z]' = x\cos x$$

$$x z = \int x\cos x\, dx$$

نفرض $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \sin x$ ونعوض بالتكامل :

$$xz = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$xz = x\sin x + \cos x + c$$

$$z = \sin x + \frac{\cos x}{x} + \frac{c}{x}$$

$$\frac{1}{y^2} = \sin x + \frac{\cos x}{x} + \frac{c}{x}$$

$$y = \left[\sin x + \frac{\cos x}{x} + \frac{c}{x}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

١٤- اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' - xy = -x^3 y^2$

الحل:

هي معادلة برنولي لحلها نقسم الطرفين على y^2

$$y' y^{-2} - x y^{-1} = -x^3$$

نفرض $z = y^{-1} \Leftarrow z' = -y^{-2} y'$ ونعوض

$$-z' - xz = -x^3 \Rightarrow z' + xz = x^3$$

وهي خطية

$$\mu = e^{\int x\,dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل

$$e^{\frac{x^2}{2}} z' + x e^{\frac{x^2}{2}} z = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\left[e^{\frac{x^2}{2}} z\right]' = x^3 e^{\frac{x^2}{2}} \overset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow} e^{\frac{x^2}{2}} z = \underbrace{\int x^3 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx}_{I} \quad ☆$$

طريقة تغير المتحول نفرض $t = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow dt = x\,dx$

$$I = 2\int t e^t\,dt$$

طريقة التجزئة

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$$

$$I = 2\left[te^t - \int e^t dt\right] = 2te^t - 2e^t + c \Rightarrow I = x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} + c$$

نعوض ب ☆

$$e^{\frac{x^2}{2}} z = x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} + c$$

$$z = x^2 - 2 + c e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\frac{1}{y} = x^2 - 2 + c e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 - 2 + c e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

١٥ ـ اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = y^4 \cos x + y \tan x$$

الحل :

وهي معادلة برنولي فنقسم على y^4

$$y^{-4} y' - \tan x \, y^{-3} = \cos x$$

نفرض $z = y^{-3} \Leftarrow z' = -3 y^{-4} y'$

$$-\frac{1}{3} z' - \tan x \, z = \cos x$$

$$z' + 3 \tan z = -3 \cos x$$

$$\mu = e^{3\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{-3 \ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos^3 x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل

$$\frac{1}{\cos^3 x} z' + 3 \frac{\sin x}{\cos^4 x} z = \frac{-3}{\cos^2 x}$$

$$\left(\frac{1}{\cos^3 x} z\right)' = \frac{-3}{\cos^2 x}$$

نكامل

$$\frac{1}{\cos^3 x} z = -3 \tan x + c$$

$$z = -3 \sin x \cos^2 x + c \cos^3 x$$

$$\frac{1}{y^3} = -3 \sin x \cos^2 x + c \cos^3 x$$

$$y = \left[-3 \sin x \cos^2 x + c \cos^3 x\right]^{-\frac{1}{3}}$$

١٦ ـ اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x y' + y = y^3$$

الحل :

وهي معادلة برنولي لذلك نقسم على y^3

$$x y^{-3} y' + y^{-2} = 1$$

نفرض $z = y^{-2} \Leftarrow z' = -2 y^{-3} y'$

$$\frac{1}{2} x z' - z = -1$$

$$z' - \frac{2}{x} z = -\frac{2}{x}$$

وهي خطية فنوجد عامل التكميل

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{-2}{x}$$

$$u = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = \quad = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل

$$\frac{1}{x^2} z' - \frac{2}{x^3} z = \frac{-2}{x^3}$$

$$\left[\frac{1}{x^2} z\right]' = \frac{-2}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x^2} z = \frac{1}{x^2} + c \Rightarrow z = 1 + c x^2$$

$$\frac{1}{y^2} = 1 + c x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{1 + c x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{1 + c x^2}}$$

طريقة ثانية

نستطيع حلها بطريقة ثانية لأنها ذات متحولات منفصلة فنكتبها بالشكل

$$x \frac{dy}{dx} = y^3 - y \Rightarrow \frac{dy}{y^3 - y} = \frac{dx}{x}$$

نفرق الكسور ونكامل

⋮

15 - اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y^2 + x^2 y' = x y$$

الحل :

$$x^2 y' - x y = -y^2$$

$$y' - \frac{1}{x} y = -\frac{1}{x^2} y^2$$

نقسم على y^2

$$y^{-2} y' - \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{-1}{x^2}$$

نعوض $z' = -y^{-2} y' \Leftarrow z = y^{-1}$

$$-z' - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow z' + \frac{1}{x} z = \frac{1}{x^2}$$

$$u = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل x

$$x z' + z = \frac{1}{x}$$

$$[xz]' = \frac{1}{x}$$ تكامل

$$xz = \ln x + c$$

$$z = \frac{\ln x}{x} + \frac{c}{x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{\ln x + c}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{\ln x + c}$$

طريقة ثانية

نلاحظ ان المعادلة التفاضلية $y^2 + x^2 y' = xy$ اذا قسمنا على x^2 تصبح متجانسة

$$\frac{y^2}{x^2} + y' = \frac{y}{x}$$

نفرض $z = \frac{y}{x} \Leftarrow y = xz \Leftarrow y' = z + xz'$ ونعوض

$$z^2 + z + xz' = z \Rightarrow xz' = -z^2 \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = -z^2$$

$$\frac{dz}{z^2} = -\frac{dx}{x}$$

تكامل

$$-\frac{1}{z} = -\ln x - c$$

$$\frac{1}{z} = \ln x + c$$

$$\frac{x}{y} = \ln x + c \Rightarrow y = \frac{x}{\ln x + c}$$

16 - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بعد أن تبرهن أنها تقبل حلاً خاصاً $y_1 = e^x$

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$$

الحل:

$y_1 = e^x \Leftarrow y_1' = e^x \Leftarrow$ نعوض

$$e^x = e^{2x} - 2e^{2x} + e^{2x} + e^x$$

محققة

المعادلة هي ريكاتي فنفرض $y = e^x + z \Leftarrow y' = e^x + z'$ نعوض

$$e^x + z' = (e^x + z)^2 - 2e^x(e^x + z) + e^{2x} + e^x$$

$$e^x + z' = e^{2x} + 2ze^x + z^2 - 2e^{2x} - 2ze^x + e^{2x} + e^x$$

$$z' = z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$\frac{dz}{z^2} = dx \overset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow} -\frac{1}{z} = x + c$$

$$z = -\frac{1}{x+c}$$

$$y - e^x = \frac{-1}{x+c} \Longrightarrow y = e^x - \frac{1}{x+c}$$

وهو الحل العام

ميكانيك ع٢ / أبي نوح العبد الله

تمرين (٦)

وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' - xy = -x^3 y^2 \quad (1)$$

الحل،

هي معادلة برنولي لحلها نقسم الطرفين على y^2

$$y' y^{-2} - x y^{-1} = -x^3 \quad (2)$$

نفرض $z = y^{-1} \Leftarrow z' = -y^{-2} y'$

نعوض بـ (2)

$$-z' - xz = -x^3$$

$$z' + xz = x^3 \quad (3)$$

$$\mu = e^{\int x\,dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

نضرب بـ (3)

$$e^{\frac{x^2}{2}} z' + x e^{\frac{x^2}{2}} z = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\left[e^{\frac{x^2}{2}} z\right]' = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} z = \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx \quad (4)$$

بطريقة تغيير المتحول حيث نفرض

نعوض بالتكامل $t = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow dt = x\,dx$

$$\int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx = 2\int \frac{1}{2} x^2 e^{\frac{x^2}{2}} x\,dx = 2\int t e^t\,dt$$

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$$

$$2\int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx = 2t e^t - 2\int e^t dt = 2[t e^t - e^t] + c$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - e^{\frac{x^2}{2}}\right] + c = x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} + c$$

نعوض بـ (4)

$$e^{\frac{x^2}{2}} z = x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} + c$$

$$z = x^2 - 2 + c e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow \frac{1}{y} = x^2 - 2 + c e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 - 2 + c e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

تمرين (١٨)

وجد حل المعادلة التفاضلية التالية (١) $y' - y^2 - \frac{1}{x} y + \frac{3}{x^2} = 0$

علماً انه تقبل حلاً خاصاً وهو $y_1 = \frac{1}{x}$

الحل :

المعادلة هي معادلة ريكاتي

نفرض

$$y = y_1 + z \Leftarrow y = \frac{1}{x} + z \Leftarrow y' = \frac{-1}{x^2} + z'$$

نعوض بـ (١) نجد

$$-\frac{1}{x^2} + z' - \left(\frac{1}{x} + z\right)^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + z\right) + \frac{3}{x^2} = 0$$

$$-\frac{1}{x^2} + z' - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} z - z^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} z + \frac{3}{x^2} = 0$$

$$z' - \frac{3}{x} z = z^2 \qquad (2)$$

وهي معادلة برنولي

لحلها نقسم على z^2

$$z^{-2} z' - \frac{3}{x} z^{-1} = 1 \qquad (3)$$

نفرض $u = z^{-1} \Leftarrow u' = -z^{-2} z'$

نعوض بـ (3)

$$-u' - \frac{3}{x} u = 1$$

$$u' + \frac{3}{x} u = -1 \qquad (4)$$

وهي معادلة خطية

نوجد عامل التكميل

$$\mu = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = x^3$$

نضربه بالمعادلة (٤)

$$x^3 u' + 3x^2 u = -x^3$$

$$[x^3 u]' = -x^3 \Rightarrow x^3 u = -\int x^3 du \Rightarrow x^3 u = -\frac{x^4}{4} + c$$

$$u = -\frac{x}{4} + c x^{-3}$$

ومنه

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{4}x + c\,x^{-3}$$

ومنه

$$\frac{1}{y-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{4}x + c\,x^{-3}$$

$$y-\frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{1}{4}x + c\,x^{-3}}$$

(٢)

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{1}{4}x + c\,x^{-3}}$$ وهو الحل العام

طريقة ثانية

نستطيع أن نفرض $y = y_1 + \frac{1}{z}$ فترد إلى خطية فوراً ونكمل حلها

تمرين (٤)

وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية (١) $y' = x y^2 + (1-2x)y + x - 1$

علماً أنه تقبل حلاً خاصاً هو $y_1 = 1$

الحل :

(١) نجري التحويل $y = y_1 + \frac{1}{z}$ الذي يرد المعادلة (١) إلى معادلة خطية

$$y' = \frac{-z'}{z^2} \Leftarrow y = 1 + \frac{1}{z}$$

نعوض في (١)

$$\frac{-z'}{z^2} = x\left(1+\frac{1}{z}\right)^2 + (1-2x)\left(1+\frac{1}{z}\right) + x - 1$$

$$\frac{-z'}{z^2} = x + \frac{2x}{z} + \frac{x}{z^2} + 1 + \frac{1}{z} - 2x - \frac{2x}{z} + x - 1$$

(٣)

$$\frac{-z'}{z^2} = \frac{x}{z^2} + \frac{1}{z} \Rightarrow -z' = x + z \Rightarrow z' + z = -x \quad (2)$$

وهي معادلة خطية كحلها نوجد عامل التكامل

$$\mu = e^{\int dx} = e^{x}$$ (١)

نضرب طرفي المعادلة (2)

$$e^{x} z' + e^{x} z = -x e^{x}$$

$$\left[e^{x} z \right]' = -x e^{x}$$

$$e^{x} z = -\int x e^{x} dx$$ (١)

$$e^{x} z = -x e^{x} + e^{x} + c$$

$$z = -x + 1 + c e^{-x}$$

ولكن نبدل بالتحويل $y = 1 + \frac{1}{z}$

$$y = 1 + \frac{1}{1 - x + c e^{-x}}$$

$$y = \frac{2 - x + c e^{-x}}{1 - x + c e^{-x}}$$ (١)

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة

احسب طول قوس الدائرة $x^2+y^2=R^2$

السؤال السادس للصفحة الثانية

المعادلات الوسيطة للدائرة هي

$$y = R\sin t$$

$$x = R\cos t \qquad 0 \leq 2\pi \leq 2\pi$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dx$$

$$y'(t) = R\cos t$$

$$x'(t) = +R\sin t$$

$$\sqrt{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} = R$$

$$L = R\int_0^{2\pi} dt = R\left[t\right]_0^{2\pi} = 2\pi R$$